

Una Invitación a la Imagen Fotoacústica

POR CARLOS MONTALTO
Universidad de Costa Rica

Resumen

Se presenta una introducción al problema de Imagen Fotoacústica. Se hace un estudio de la modelación matemática y el problema inverso asociado. La presentación está dirigida a estudiantes de grado en matemáticas y áreas afines. Para motivar el problema se hace un análisis del caso uno dimensional, se exploran distintas generalizaciones del problema y se presentan algunos problemas abiertos.

Tabla de Contenidos

1	Introducción	1
2	Modelación Matemática	2
2.1	Parte acústica	2
2.2	Parte óptica	3
3	Ejemplo Ilustrativo	4
3.1	Dimensionalidad y Geometría Integral	6
3.2	Velocidad Variable y Geometría Riemanniana	7
3.3	Datos Parciales y Análisis Microlocal	8
3.4	Interacción con Frontera y Teoría de Control	8
3.5	Atenuación de Onda	9
3.6	Algoritmos de Reconstrucción	9
	Bibliografía	10

1 Introducción

La *Imagen Fotoacústica* es una tecnología que utiliza las ondas acústicas generadas por la absorción de las ondas ópticas en un objeto para generar imágenes de su interior. En los últimos años se ha explorado la idea de combinar distintas ondas para obtener las mejores características de imagen de cada una. En términos generales, las imágenes que se obtienen de usar solamente ondas ópticas están caracterizadas por tener un alto contraste pero una baja resolución, mientras que las que se obtienen de ondas acústicas se caracterizan por una alta resolución pero un bajo contraste (agregar cita). La idea de estas modalidades híbridas es hacer un acoplamiento físico de las ondas para obtener las mejores propiedades de cada una. A estas modalidades se le conocen como métodos de ondas múltiples o acopladas en la comunidad de biomedicina y como problemas inversos híbridos o acoplados en la comunidad matemática [5]. La Imagen Fotoacústica es uno de estos métodos que ha despertado el interés de distintas comunidades por sus potenciales aplicaciones, bajo costo y complejidad matemática¹.

Cuando cortos pulsos de ondas electromagnéticas se usan para irradiar un tejido biológico, el efecto fotoacústico/termoacústico resulta en la emisión de señales acústicas (“el sonido de la luz”). Estas ondas acústicas se miden en el exterior del objeto por medio de transductores ultrasónicos de banda ancha y esta información se utiliza para obtener el coeficiente de difusión del tejido. El proceso se ilustra en la Figura 1

1. En este (<http://www.youtube.com/watch?v=2okW5QoppGY>) el profesor Lihong Wang de la Universidad de Rice habla de aplicaciones de PAT

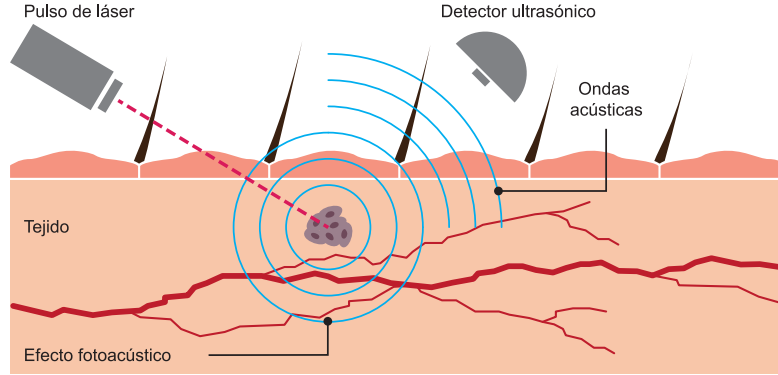


Figura 1. En esta imagen se ilustra el proceso de físico que se lleva a cabo en imagen fotoacústica. Un pulso de laser de espectro infrarrojo se enfoca en el área que se desea iluminar. La radiación absorbida se transforma en ondas acústicas por medio del fenómeno fotoacústico. Las ondas acústicas se miden con detectores ultrasónicos en el exterior de un objeto, los datos obtenidos tienen información acoplada que se utiliza para hacer una imagen de su interior.

El objetivo principal de la imagen fotoacústica es obtener información del coeficiente de absorción electromagnético del tejido utilizando las mediciones acústicas producidas por el efecto fotoacústico. La información del coeficiente de absorción está relacionado con la estructura molecular del tejido y una buena reconstrucción de este puede revelar condiciones patológicas que facilite el diagnóstico de enfermedades y su monitoreo. A continuación presentamos una descripción matemática del problema, mencionando brevemente las razones físicas detrás de esta modelación.

2 Modelación Matemática

El proceso reconstrucción por medio de imagen fotoacústica se divide en dos partes: una acústica y otra óptica. La primera parte es la acústica y consiste en utilizar las mediciones ultrasónicas en la superficie del objeto para recuperar información interna de la radiación absorbida por el tejido. La segunda parte utiliza la información interna recuperada en el paso anterior para obtener una imagen del coeficiente de absorción óptica del objeto. En este artículo nos enfocaremos en la parte acústica, sin embargo presentamos la modelación de ambas partes.

2.1 Parte acústica

El primer paso es lo que normalmente se conoce como Imagen Fotoacústica (PAT - por sus siglas en inglés), sin embargo en este paso solamente se obtiene la información del coeficiente de absorción modulado por la densidad espacial del photon (ver Ecuación (5)). En muchas aplicaciones esta información es suficiente para el diagnóstico médico.

Matemáticamente este proceso se modela como la reconstrucción de la condición inicial en la ecuación de onda utilizando información lateral. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto conexo con frontera suave, entonces la presión acústica u satisface la ecuación de onda,

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \nabla \cdot c^2(x) \nabla u &= 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) &= f(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ \partial_t u(0, x) &= 0, & x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (1)$$

donde $c(x)$ es la velocidad de la onda y $f(x) \in H_0^1(\Omega)$ es la señal ultrasónica generada a tiempo $t=0$. En general asumimos que la velocidad de la onda es una función suave y que afuera del objeto es constante igual a la velocidad del medio, entonces

$$c \in C_{\text{int}}^\infty(\mathbb{R}) := \{c \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : c \text{ es constante en } (\partial\Omega)^c\}$$

Pregunta 1. (Parte Acústica) El objetivo de la parte óptica consiste en encontrar un tiempo de medición T en (1) con el que sea posible recuperar

$$(f, c) \quad \text{usando la medición lateral de la onda} \quad u(t, x)|_{(0, T) \times \partial\Omega}. \quad (2)$$

En otras palabras, queremos invertir el **mapeo de medición**

$$\begin{aligned} \Lambda: H^1(\Omega; c^{-2}d\text{Vol}) \times C_{\text{int}}^\infty(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow L^2((0, T) \times \partial\Omega) \\ (f, c) &\longmapsto u|_{(0, T) \times \partial\Omega} \end{aligned} \quad (3)$$

para un tiempo óptimo. Note que la energía generada por el efecto de la propagación de radiación está modelado como una condición inicial a tiempo $t=0$. La justificación detrás de esta modelación es la gran diferencia entre las velocidad de la luz (aprox. $2.3 \times 10^8 \text{ m/s}$) y la del sonido (aprox. $1.5 \times 10^3 \text{ m/s}$), desde el punto de vista de la onda acústica toda la radiación electromagnética sucede a tiempo cero. Esta suposición es robusta pues en el caso de imagen fotoacústica los fotones están cerca del espectro infrarrojo con longitudes de onda entre 600 nm y 900 nm.

2.2 Parte óptica

El segundo paso en en la reconstrucción se conoce como la parte cualitativa del problema, Tomografía Fotoacústica Cualitativa (qPAT-por sus siglas en inglés) y el objetivo principal es obtener propiedades electromagnéticas del tejido por medio de la medición interna f obtenida en el primer paso y la iluminación inicial. La radiación electromagnética se modela típicamente (pero no exclusivamente) por medio de la ecuación de difusión o por la ecuación de transporte. Aquí usaremos la formulación difusiva que modela la densidad espacial del photon v por medio de una ecuación elíptica con condición de frontera de Dirichlet dada por,

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \gamma(x) \nabla v + \sigma(x) v &= 0 \quad \text{en } \Omega, \\ v &= I \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (4)$$

donde $\gamma(x)$ es el coeficiente de difusión y $\sigma(x)$ el coeficiente de absorción que asumimos son funciones con valores complejos, tales que $0 < \epsilon < \gamma, \sigma < \frac{1}{\epsilon}$ para $\epsilon > 0$. En la ecuación (4), $I(x)$ es la iluminación inicial usada para probar el tejido biológico y f es el coeficiente interno obtenido en el primer paso y es igual a

$$f(x) = \Gamma(x) \sigma(x) v(x) \quad x \in \Omega, \quad (5)$$

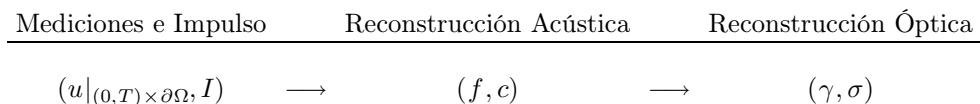
donde $\Gamma(x)$ es el **Güneisen parameter** (que modela la fuerza del efecto fotoacústico y su valor es conocido en tejido biológico).

Pregunta 2. (Parte óptica) El objetivo de la parte óptica es recuperar en (4) las funciones

$$(\gamma, \sigma) \quad \text{utilizando } (f, I),$$

donde f se obtuvo de la parte óptica y satisface la ecuación (5).

En resumen, por medio de ambos pasos convertimos la información acústica en la frontera $u(t, x)|_{(0, T) \times \partial\Omega}$ en información del coeficiente de absorción σ y lo ilustramos en el siguiente diagram.



revisar valor complejos

El resto del artículo se enfoca en estudiar la parte acústica², avances en la reconstrucción óptica son objeto de investigaciones actuales. El lector interesado puede consultar la artículos (agregar citas) y sus referencias. Para fijar ideas estudiamos un caso sencillo en que la onda viaja en una dimensión y su velocidad es constante. Veremos en el Teorema 1 que en este caso podemos recuperar la fuente y la velocidad de la información lateral de la onda.

3 Ejemplo Ilustrativo

Considere la ecuación de onda en una dimensión con velocidad $c \in \mathbb{R}^+$ constante y condición inicial f dada por

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - c^2 \Delta u &= 0 && \text{en } (0, T) \times \mathbb{R} \\ u|_{t=0} &= f(x) && \text{en } \mathbb{R} \\ \partial_t u|_{t=0} &= 0 && \text{en } \mathbb{R} \end{aligned} \quad (6)$$

La solución de esta ecuación viene dada por³

$$u(t, x) = \frac{1}{2}[f(x - ct) + f(x + ct)]. \quad (7)$$

Observe que u se puede escribir como la suma de dos ondas que viajan en direcciones opuestas ambas a velocidad constante c , i.e.,

$$u(t, x) = u_+(t, x) + u_-(t, x)$$

donde

$$u_{\pm}(t, x) = \frac{1}{2}f(x \mp ct), \quad (8)$$

como se ilustra en la siguiente Figura 2

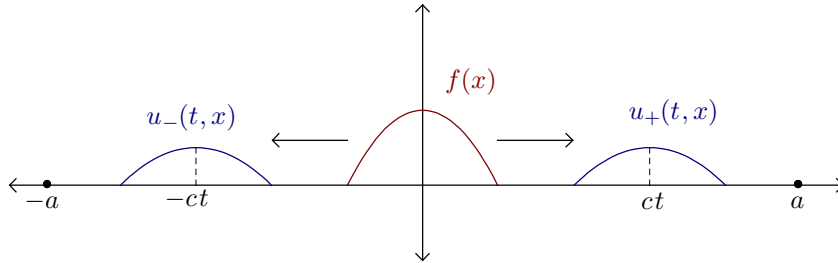


Figura 2. Se ilustran las dos ondas u_{\pm} que se originan de la condición inicial f

Suponga que tenemos los medidores acústicos en los bordes del intervalo $(-a, a)$, entonces el mapeo de medición (3) viene dado por

$$[\Lambda(f, c)](t, \pm a) = u(t, \pm a), \quad t > 0$$

Tenemos el siguiente teorema de reconstrucción acústica.

2. En muchos experimentos de PAT se utiliza solamente la información recuperada en $f(x)$ para estimar el coeficiente de absorción sin necesidad de considerar la parte óptica (CITAS) A pesar de esta simplificación los resultados de las imágenes son prometedores.

3. Esto se puede ver tomando el cambio de variable $v = x - ct$ y $w = x + ct$ y ver que la ecuación diferencial en (1) se convierte en $u_{vw} = 0$, lo que implica que u es la suma de una función que depende de v y otra que depende de w . Volviendo a las variables originales y utilizando las condiciones iniciales se puede concluir la fórmula (7)

Teorema 1. Suponga que $c_1, c_2 > 0$, $f_1, f_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$ con $\text{supp } f_1, f_2 \subset (-a, a)$ para $a > 0$ y que alguno f_1 ó f_2 no es idénticamente cero. Sean u_1 y u_2 las soluciones de la ecuación de onda (6) para velocidades c_1 y c_2 y fuentes f_1 y f_2 , entonces si $T \geq \max(2a/c_1, 2a/c_2)$ y

$$[\Lambda(f_1, c_1)](t, \pm a) = [\Lambda(f_2, c_2)](t, \pm a) \quad \text{para todo } 0 \leq t \leq T \quad \text{implica que } c_1 = c_2 \text{ y } f_1 = f_2$$

Demostración. Procedemos por contradicción. Suponga que $c_1 \neq c_2$, sin pérdida de generalidad supongamos que $c_2 > c_1$. Por la condición en el soporte de las fuentes tenemos que

$$u_i(t, \pm a) = \frac{1}{2} f_i(\pm a \mp c_i t), \quad \text{para } 0 \leq t \leq T \quad (i = 1, 2)$$

Por la hipótesis en las mediciones y nuevamente utilizando el soporte de las fuentes, tenemos que para $0 \leq t \leq T$,

$$\begin{aligned} f_1(a - c_1 t) &= f_2(a - c_2 t) \\ f_1(-a + c_1 t) &= f_2(-a + c_2 t) \end{aligned}$$

Tomando $x = a - c_1 t$ en la primera ecuación y $x = -a + c_1 t$ en las segunda, tenemos que estas ecuaciones se pueden reescribir en la forma

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f_2\left(\frac{c_2}{c_1}x - a\left(\frac{c_2}{c_1} - 1\right)\right), & a - c_1 T \leq x \leq a \\ f_1(x) &= f_2\left(\frac{c_2}{c_1}x + a\left(\frac{c_2}{c_1} - 1\right)\right), & -a \leq x \leq c_1 T - a. \end{aligned} \quad (9)$$

Por hipótesis $c_1 T - a \geq a$, entonces para los valores donde ambas expresiones son válidas obtenemos que

$$f_2\left(\frac{c_2}{c_1}x - a\left(\frac{c_2}{c_1} - 1\right)\right) = f_2\left(\frac{c_2}{c_1}x + a\left(\frac{c_2}{c_1} - 1\right)\right), \quad -a \leq x \leq a.$$

Tomando $z = \frac{c_2}{c_1}x + a\left(\frac{c_2}{c_1} - 1\right)$ y $p = 2a\left(\frac{c_2}{c_1} - 1\right) > 0$ obtenemos que

$$f_2(z - p) = f_2(z) \quad -a \leq z \leq a + p$$

Ahora, como $f_2 = 0$ en $(a, a + p)$ y $p > 0$, de manera recursiva (ver la siguiente Figura 3) obtenemos que $f_2 = 0$ en $(-a, a)$.

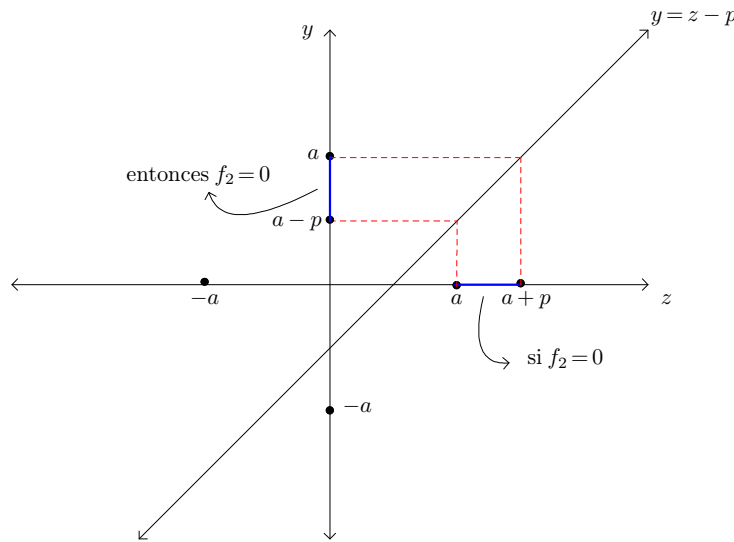


Figura 3. Se ilustra cómo obtener que $f_2 = 0$ en $(-a, a)$ de manera recursiva.

Luego de (9) obtenemos que $f_1 = 0$ en $(-a, a)$, que es una contradicción. Finalmente, si $c_1 = c_2$ nuevamente de (9) concluimos que $f_1 = f_2$. \square

En este resultado se recuperan de manera simultánea la fuente y la velocidad.

Observación 2.

1. El tiempo T es óptimo para la reconstrucción simultánea (agregar ejemplo). Sin embargo, si sabemos a priori que las velocidades son iguales $c = c_1 = c_2$, entonces se deduce de (9) que es suficiente tomar $T \geq a/c$ para garantizar que $f_1 = f_2$.
2. Tal vez podamos agregar algo de qué tanto podemos extender el espacio de las fuentes (e.g., $H^1(-a, a)$)

Este es el tipo de teorema que queremos demostrar, pero generalizando las hipótesis. Veamos algunas de las direcciones que podemos tomar:

3.1 Geometría Integral

Al aumentar la dimensionalidad en el problema de IFA se encuentran conexiones bonitas con en área de geometría integral⁴. Para analizar esta relación nos vamos a enfocar en el caso de dimensión $n = 3$, que es de particular importancia en aplicaciones. Una de las preguntas en geometría integral consiste en analizar si es posible recuperara una función f a partir de las información sobre sus integrales restringidas a ciertas familias de curvas. En concreto, el problema de IFA está relacionado con el problema de invertir la *transformada esférica de Radon*, que es la integral de una función sobre esferas, ver Fig 4. Esta integrales llevan el nombre del matemático Johann Radon por su trabajo pionero al estudiar la posibilidad de recuperar una función a partir de las integrales sobre planos. Las integrales esféricas fueron analizadas anteriormente por el matemático Paul Funk⁵ en el artículo [2], para describir las métricas de Zoll en la esfera.

Para ver la relación entre el problema de IFA y la tranformada esférica de Radon, consideremos, no solo el valor, sino el promedio de la función f sobre esferas las $S(x, r)$ con centro x y radio r , conocido también como el *promedio esférico* de f ,

$$Mf(x, r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S(x, r)} f(y) d\sigma = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{|\theta|=1} f(x + r\theta) d\theta, \quad (x, r) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+.$$

Ejercicio 1. Un ejercicio bonito es verificar el hecho intuitivo de que el promedio esférico de una función continua tiende al valor de la función cuando los radios de los círculos tienden a cero, i.e.,

$$\lim_{r \rightarrow 0} Mf(x, r) = f(x)$$

Ejercicio 2. Si una función $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ es armónica, i.e., $\Delta u = 0$, entonces para cada x fijo el promedio esférico se mantiene constante como función del radio. Más aún, esto caracteriza a estas funciones armónicas

$$\Delta u = 0 \quad \iff \quad u(x) = Mu(x, r) \quad x \in \mathbb{R}^3, r \geq 0$$

Sugerencia: Muestre que

$$\partial_r Mu(x, r) = \frac{1}{3r\pi} \int_{B(x, r)} \Delta u(y) dy$$

Pregunta 3. Suponga que conocemos el valor de $Mf(x, r)$ para todas las esferas con centro x en la frontera de un dominio. Nos preguntamos qué información de la función f está presente en estas integrales.

En concreto, sea Ω un abierto conexo con frontera suave $\partial\Omega$. Lo primero que queremos estudiar el la inyectividad del operador, i.e., nos preguntamos si

$$Mf_1(x, r) = Mf_2(x, r), \quad (x, r) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \implies f_1 = f_2$$

Dado que el operador Mf es lineal es suficiente comparar con la función nula. En la Fig. 4. se ilustra el problema de inyectividad para una función f tal que $\text{supp } f \subset \Omega$,

4. En su concepción moderna impulsada por trabajos como el de Sigurdur Helgason [4] y Gelfand-Gindikin-Graev [3].

5. Paul Funk fue un matemático Australiano de ascendencia judía, estudiante de David Hilbert, que trabajó en el cálculo de variaciones. Fue profesor de la Universidad Técnica de Alemania en Praga, donde fue capturado y llevado a un campo de concentración en Theresienstadt.

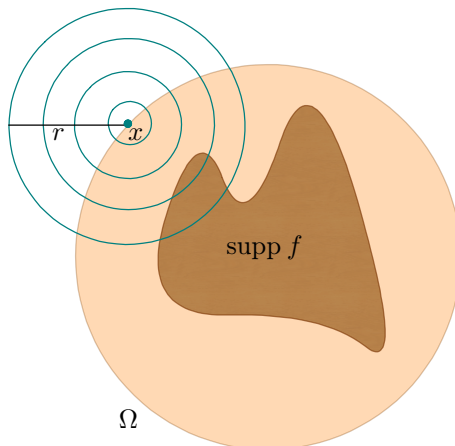


Figura 4. Se ilustra la transformada esférica de Radon de la función f restringida a la frontera del dominio, i.e., $x \in \partial\Omega$. Queremos recuperar la función f a partir de la información de sus integrales sobre esferas centradas en x . En este caso particular el dominio es una círculo, sin embargo la pregunta es para dominios más generales. Por otro lado, el dibujo es 2 dimensional, pero debe pensarse como 3 dimensional.

Ejercicio 3. Sea $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ armónica y Ω un abierto conexo con frontera suave $\partial\Omega$. Verifique que promedio esférico de u restringido a $\partial\Omega$ determina u , i.e.,

$$Mu(x, r) = 0, \quad (x, r) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \implies u = 0$$

Sugerencia. Muestre que esta pregunta es equivalente probar que el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

tiene solución trivial.

Del ejercicio anterior se ve que el promedio esférico de u restringido a $\partial\Omega$ determina a cualquier función armónica. Para extender este resultado a funciones suaves vamos a relacionar este problema con el problema de imagen fotoacústica.

3.1.1 Relación con Imagen Fotoacústica

El problema de inyectividad del promedio esférico es equivalente al problema de inyectividad en IFA, ver Proposición 3. Si u es la solución de (6) en \mathbb{R}^3 , entonces por la fórmula de Kirchhoff (ver pág. 234, [6]) para \mathbb{R}^3 , u viene dada en términos del promedio esférico

$$u(t, x) = \partial_t \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S(x, ct)} f(y) d\sigma \right) = \partial_t (tMf(ct, x)), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3.$$

Se tiene la siguiente proposición que nos dice que la inversión de ambos problemas es equivalente.

Proposición 3. Sea Ω un abierto conexo con frontera suave. Suponga que $c_1, c_2 > 0$, $f_1, f_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ con $\text{supp } f_1, f_2 \subset \Omega$. Sean u_1 y u_2 las soluciones de la ecuación de onda (6) para velocidades c_1 y c_2 y fuentes f_1 y f_2 . Entonces

$$[\Lambda(f_1, c_1)](t, x) = [\Lambda(f_2, c_2)](t, x) \quad \text{en } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \iff Mf_1(c_1 t, x) = Mf_2(c_2 t, x) \quad \text{en } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega$$

Demostración. Dado que $t \mapsto tMf(ct, x)$ es suave y pasa por $(0, 0)$ se tienen las siguientes equivalencias consecuencias de (3.1.1),

$$\begin{aligned} & \iff [\Lambda(f_1, c_1)](t, x) = [\Lambda(f_2, c_2)](t, x) \\ & \iff \partial_t (tMf_1(c_1 t, x)) = \partial_t (tMf_2(c_2 t, x)) \\ & \iff tMf_1(c_1 t, x) = tMf_2(c_2 t, x) \\ & \iff Mf_1(c_1 t, x) = Mf_2(c_2 t, x) \end{aligned}$$

La última igualdad se obtiene primero para $t \neq 0$ y es evidente para $t = 0$. \square

En el artículo [1] David Finch, Sarah K. Patch y Rakesh utilizaron esta conexión para mostrar que la transformada esférica de Radon es inyectiva. Su argumento se basa en la propiedad de continuación única para la ecuación de onda.

Proposición 4. (*Continuación Única*) Supongamos que $u \in C^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ satisface la ecuación de onda

$$\partial_t^2 u - c^2 \Delta u = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$$

Sean $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ un punto en el espacio-tiempo y $T, \varepsilon > 0$ dos números positivos. Si

$$u(t, x) = 0 \quad c|t - t_0| < T, \quad |x - x_0| < \varepsilon.$$

entonces

$$u(t, x) = 0 \quad c|t - t_0| + |x - x_0| < T$$

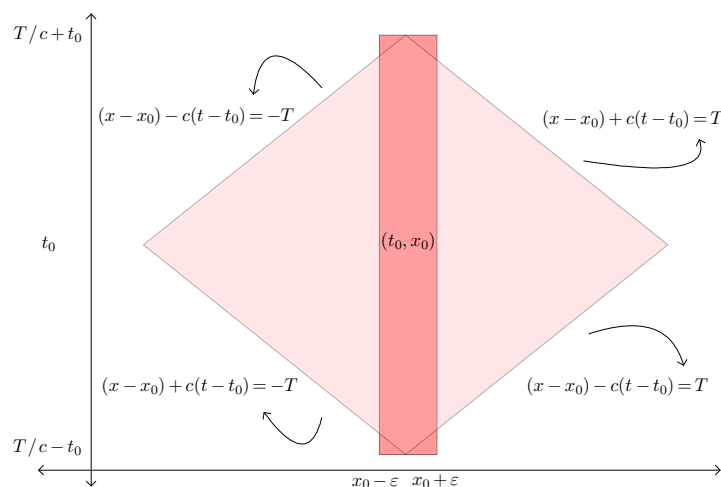


Figura 5. La propiedad de continuación única nos dice que si la solución de la ecuación de onda se anula en el rectángulo rojo entonces se anula en el paralelogramo característico de color rosado, note que sus lados son curvas características.

Observación 5. La prueba para el caso $n = 1$ se deduce de la propiedad que si A, B, C, D son los vértices de un paralelogramo característico, entonces

$$u(A) + u(C) = u(B) + u(D)$$

3.2 Velocidad Variable y Geometría Riemanniana

Queremos considerar el caso en que la velocidad de la onda $c(x)$ es variable con el objetivo de modelar dominios como el cuerpo humano (e.g., piel, cráneo, etc). Esto es equivalente a considerar la ecuación de onda en una geometría dada por $g = c(x)I_{n \times n}$, donde $I_{n \times n}$ es la matriz identidad. Uno de los problemas abiertos más interesantes en imagen fotoacústica se puede enunciar de la siguiente manera:

Problema abierto. Encontrar condiciones óptimas sobre la velocidad variable $c(x) \in C_{\text{int}}^{\infty}(\mathbb{R})$ y la fuente f para que el Teorema 1 se puede generalizar a dimensión $n = 3$.

Aún más, podemos considerar geometrías anisotrópicas (i.e., donde la forma en que la onda viaja depende de la dirección que tenga) dadas por una métrica Riemanniana cambiando el operador de onda en (1) por $\partial_t^2 - \Delta_g$ donde Δ_g es el operador de Laplace-Beltrami (i.e., la generalización del Laplaciano a una variedad Riemanniana). En experimentos se ha visto que las capas de la piel tienen comportamiento anisotrópico (CITA).

3.3 Datos Parciales y Análisis Microlocal (Estabilidad?)

Nos interesa entender si es posible extender este tipo de teoremas cuando solamente conocemos la información de la onda en un subconjunto $\Gamma \subset \partial\Omega$ de la frontera, i.e., si podemos recuperar (f, c) usando la medición (parcial) de la onda $u(t, x)|_{(0, T) \times \partial\Gamma}$. Este tipo de problemas se llaman de *datos parciales*.⁶

3.4 Interacción con Frontera y Teoría de Control

En la forma en que planteamos el problema de imagen fotoacústica la onda no se ve afectada por los detectores acústicos. Note que la ecuación diferencial (1) está definida en todo \mathbb{R} por lo que no interactúa con la frontera $\partial\Omega$ (i.e., con los sensores que se encuentra ahí). Por ejemplo, para considerar esta interacción podemos cambiar la ecuación (1) y agregarle una condición de tipo Robin dada por

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - c^2 \Delta u &= 0 && \text{en } (0, T) \times \Omega \\ u|_{t=0} &= f(x) && \text{en } \Omega \\ \partial_t u|_{t=0} &= 0 && \text{en } \Omega \\ \partial_\nu u + \lambda \partial_t u &= 0 && \text{en } (0, T) \times \partial\Omega \end{aligned} \quad (10)$$

donde $0 \leq \lambda \leq 1/c$ es una función suave en $\partial\Omega$. El caso en que $\lambda \equiv 0$ decimos que la frontera es *perfectamente reflexiva*, si $0 < \lambda < 1/c$ decimos que es *parcialmente reflexiva* y si $\lambda \equiv 1/c$ diremos que es *transparente*. En la Figura X se ilustran los tres tipos de frontera. Esto condición nos dice que la derivada normal en la frontera es proporcional al velocidad en la frontera.

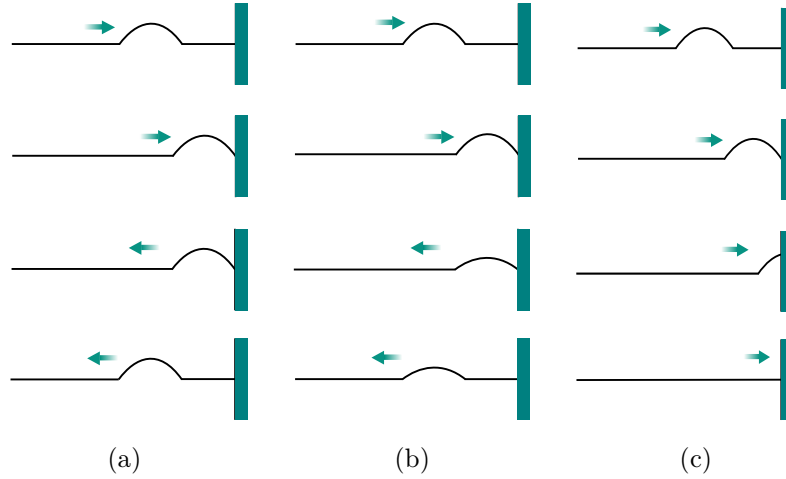


Figura 6. Se ilustran los tres tipos de frontera: (a) perfectamente reflexiva, (b) parcialmente reflexiva y (c) transparente.

Para entender un poco más esta condición de frontera consideremos el caso de la ecuación sin condición de frontera (1). Tenemos que la onda u se divide en dos partes una que viaja en dirección positiva y otra en dirección negativa. Si observamos la onda $u_+(t, x)$ dada en (8) que viaja en dirección positiva, vemos que al encontrarse con el detector ubicado en la posición $x = a$ satisface la condición de frontera transparente⁷

$$\partial_\nu u_+(t, a) + \frac{1}{c} \partial_t u_+(t, a) = 0$$

Esta relación se puede ver como el balance perfecto entre la derivada normal y la velocidad si la onda viaja libremente. El factor λ viene restringir el valor de la derivada normal y transferir parte de la velocidad de la onda a la frontera, haciendo que se genere una reflexión. En el caso extremo cuando $\lambda \equiv 0$, la frontera es rígida y por lo tanto perfectamente reflexiva.⁸

6. Ver si es posible generalizar el Teorema si solo tenemos información en (t, a)

7. Note que en este detectora $\partial_\nu = \partial_x$.

8. Hablar sobre la teoría de control.

3.5 Atenuación de Onda

Cuando la onda viaja e interactúa por el medio pierde energía (e.g., reducción de amplitud), a este proceso se le conoce como *atenuación*. En este momento no hay un consenso sobre la forma de modelar la atenuación en tejido biológico, sin embargo una primera aproximación es agregándole un término de atenuación de la forma $\alpha(x)\partial_t$ al sistema acústico. Para hacer esto no es suficiente cambiar la expresión de onda $\partial_t^2 u - \nabla \cdot c^2(x)\nabla u$ por $\partial_t^2 u - \nabla \cdot c^2(x)\nabla u + \alpha(x)\partial_t$, en la ecuación (1) sino que tenemos que entender

$$\partial_t^2 \tilde{u} - \nabla \cdot c^2(x)\nabla \tilde{u} = \delta'(t)f(x), \quad (t, x) \in (-\infty, \infty) \times \mathbb{R},$$

3.6 Algoritmos de Reconstrucción

Bibliografía

- [1] David Finch y Sarah K Patch. Determining a function from its mean values over a family of spheres. *SIAM journal on mathematical analysis*, 35(5):1213–1240, 2004.
- [2] Paul Funk. *Über Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien*. W. Fr. Kaestner, 1911.
- [3] Izrail' Moiseevich Gelfand, Semen Grigor'evich Gindikin, y Mark Iosifovich Graev. *Selected topics in integral geometry*, volumen 220. American Mathematical Soc., 2003.
- [4] Sigurdur Helgason. *Integral geometry and Radon transforms*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [5] Plamen Stefanov y Gunther Uhlmann. Multi-wave methods via ultrasound. *Inverse Problems and Applications, Inside Out II, MSRI Publications*, 60:271–323, 2013.
- [6] Walter A Strauss. *Partial differential equations: An introduction*. John Wiley & Sons, 2007.